

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : آمار و احتمال	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی پازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۰ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید.		
ردیف	سوالات		
	نمره		

عبارت زیر را به زبان منطق گزاره‌ها بنویسید:

اگر تقاضا ثابت بماند و قیمت‌ها تنزل کند میزان معاملات زیاد می‌شود، اگر تنزل قیمت‌ها افزایش میزان معاملات را موجب شود آنگاه می‌توان نرخ‌ها را ثابت نگه داشت، اگر تقاضا ثابت بماند، پس می‌توان نرخ‌ها را ثابت نگه داشت.

از مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 1000\}$ عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که:

عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد.

عدد انتخابی نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۵.

۴

دو ظرف داریم که در ظرف اول ۳ مهره سفید و ۴ سیاه و در ظرف دوم ۲ مهره سفید و ۳ سیاه هست. دو مهره از ظرف اول برداشته در ظرف دوم قرار می‌دهیم و سپس مهره‌ای از ظرف دوم برمی‌داریم. اگر A پیشامد سفید بودن هر دو مهره اول و B پیشامد سفید بودن مهره آخر باشد، آیا A و B مستقل‌اند؟

۵

مجموعه مرجع برابر با اعداد طبیعی یک‌رقمی بوده و $A \subseteq B$ است. اگر $(A \times A) \cap (B \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ ، تعیین کنید تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A' چقدر است؟
تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن بیشتر است؟

۶

سه کیسه داریم. در اولی ۲ مهره سفید و ۲ سیاه، در دومی ۱ مهره سفید و ۳ سیاه و در سومی ۳ مهره سفید و ۱ سیاه هست. مهره‌ای از کیسه اول برداشته در کیسه دوم می‌گذاریم، سپس از کیسه دوم مهره‌ای برداشته به کیسه سوم منتقل می‌کنیم و در نهایت مهره‌ای از کیسه سوم برمی‌داریم. اگر A پیشامد سفید بودن مهره اول، B پیشامد سیاه بودن مهره دوم و C پیشامد سفید بودن مهره سوم باشد، آیا A و B و C مستقل‌اند؟

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge (p \vee r)$$

ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هریک را بنویسید.

۸

$$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

الف

$$\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$$

ب

$$\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$$

پ

$$\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} = 0$$

ت

۹ در ظرف A، ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و در ظرف B، ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. ۲ مهره از ظرف A برمی‌داریم و در ظرف B قرار می‌دهیم، سپس سه مهره از ظرف B برمی‌داریم چقدر احتمال دارد هر سه مهره سفید باشد؟

۱۰ اگر احتمال قبولی کیومرث در آزمون رانندگی سه برابر احتمال قبولی خسرو در این آزمون باشد و احتمال قبولی لااقل یکی از این دو برابر $\frac{17}{25}$ باشد، احتمال قبولی خسرو در این آزمون چقدر است؟

۱۱ دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر یکسان ظاهر شدند دو خودکار را از بین ده خودکار متمایز انتخاب می‌کنیم، ولی اگر تاس‌ها یکسان ظاهر نشدند، فقط یک خودکار از بین ده خودکار انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه این عمل چند برآمد دارد؟

با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، ثابت کنید:

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$$

۱۳ با استفاده از قوانین و خواص جبر مجموعه‌ها درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف

$$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

ب

$$[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$$

۱۴ از کیسه‌ای که حاوی ۳ مهره سیاه متمایز و ۳ مهره سفید متمایز است، ۲ مهره به‌طور تصادفی و همزمان خارج می‌کنیم. اگر دو مهره خارج‌شده هم‌رنگ باشند ۳ سکه و در غیر این صورت ۲ سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

۱۵ با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A' \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (A' \cap C)$$

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = x\} \quad C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\} \quad E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3 + 2m = 3m^2\}$$

۱۷ ظرف A، شامل ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز و ظرف B شامل ۵ مهره آبی و ۷ مهره قرمز است. از ظرف A، دو مهره به تصادف و باهم خارج می‌کنیم و در ظرف B قرار می‌دهیم سپس از ظرف B یک مهره خارج می‌کنیم. اگر مهره خارج شده از ظرف B آبی باشد با چه احتمالی مهره‌های خارج شده از ظرف A هم‌رنگ بوده‌اند؟

۱۸ اگر $p \vee q \equiv F$ و r دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف

$$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$$

ب

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

۲۰ A و B پیشامدهایی در فضای S می‌باشند طوری‌که: $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ و $P(B) = \frac{4}{5}$. مقدار $P(A|B)$ را محاسبه کنید.

۲۱ چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۶ تایی آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تایی آن‌ها قرمز هستند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم، احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

۲۲ سه تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده ۱۵ است، چقدر احتمال دارد هر سه تاس یکسان ظاهر شوند؟

از مجموعه $S = \{۵۱, ۵۲, \dots, ۳۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم؛ احتمال این را بیابید که عدد انتخاب شده بر ۶ یا ۷ بخش پذیر باشد ولی مضرب ۴۲ نباشد.

دو ظرف همانند داریم. در ظرف اول ۱۲ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب و در ظرف دوم ۶ لامپ سالم و ۶ لامپ معیوب موجود است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و لامپی از داخل آن خارج می‌کنیم. اگر این لامپ معیوب باشد، با چه احتمالی از ظرف اول خارج شده است؟

تعداد افرازهای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ به سه زیرمجموعه با حداکثر دو عضو بیشتر است یا تعداد افرازهای $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ به سه زیرمجموعه دو عضوی؟

اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A \cap B$ ، ۱۰۱۶ واحد بیشتر و تعداد اعضای مجموعه $A - B$ برابر با ۷ عضو باشد، تعیین کنید:

الف A چند زیرمجموعه سره ناتهی دارد؟

ب A چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

۲۷ اگر $A = \{m \in \mathbb{Z} | 1 \leq 2^m < 5\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, آنگاه مجموعه $(A \times B) - (B \times A)$ چند زیرمجموعه دارد؟

۲۸ یک عدد طبیعی کوچکتر از ۴۰۰ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد کدام است؟

۲۹ برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S ثابت کنید:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

۳۰ اگر A و B دو مجموعه باشند:

الف با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$$

۳۱ اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، با استفاده از جبر گزاره‌ها نشان دهید: $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \wedge p \equiv p$

۳۲ برای تساوی زیر مثال نقض بزنید:

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

۳۳ اگر $A = [-1, 2]$ و $B = (-2, 1]$ ، نمودار ضرب دکارتی $A^2 - A \times B$ و $B^2 - A^2$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : آمار و احتمال	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۳ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		نمره

۱ فرض کنیم:

p = تقاضا ثابت بماند

q = قیمت ها تنزل کند

r = میزان معاملات زیاد شود

s = می توان نرخ ها را ثابت نگه داشت

گزاره اگر تقاضا ثابت بماند و قیمت ها تنزل کند میزان معاملات زیاد می شود معادل است با:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

گزاره اگر تنزل قیمت ها افزایش میزان معاملات را موجب شود آنگاه می توان نرخ ها را ثابت نگه داشت معادل است با:

$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow s$$

استدلال بالا شامل سه فرض است و در آخر با واژه پس نتیجه گیری کرده است، لذا باید بین فرض ها ترکیب عطفی داشته باشیم و از همه آنها نتیجه مدنظر را بگیریم. بنابراین داریم:

$$[[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(q \Rightarrow r) \Rightarrow s] \wedge p] \Rightarrow s$$

پاسخ سؤالات ۲ تا ۳

۲

$$P(A) = \frac{\left[\frac{1000}{3} \right]}{1000} = \frac{333}{1000}$$

بخش پذیری بر ۳

$$P(B) = \frac{\left[\frac{1000}{5} \right]}{1000} = \frac{200}{1000}$$

بخش پذیری بر ۵

$$P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{1000}{15} \right]}{1000} = \frac{66}{1000}$$

بخش پذیر هم بر ۳ و هم بر ۵

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{333}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{267}{1000}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - \left(\frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} \right) = \frac{533}{1000}$$

۳

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{4}{7} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{2}{7} + \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{147} + \frac{12}{147} + \frac{36}{147} = \frac{60}{147} = \frac{20}{49}$$

درضمن:

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{147} = \frac{4}{49}$$

در رابطه زیر امتحان می‌کنیم:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{4}{49} \neq \frac{1}{7} \cdot \frac{20}{49}$$

پس مستقل نیستند.

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \\ A \cap B = \{1, 2\} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \{1, 2\} \Rightarrow A' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow |A'| = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی } A' = \binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \\ \text{تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی } A' = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \end{array} \right\} \Rightarrow 35 - 21 = 14$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \right) = \frac{17}{50} + \frac{16}{50} = \frac{33}{50}$$

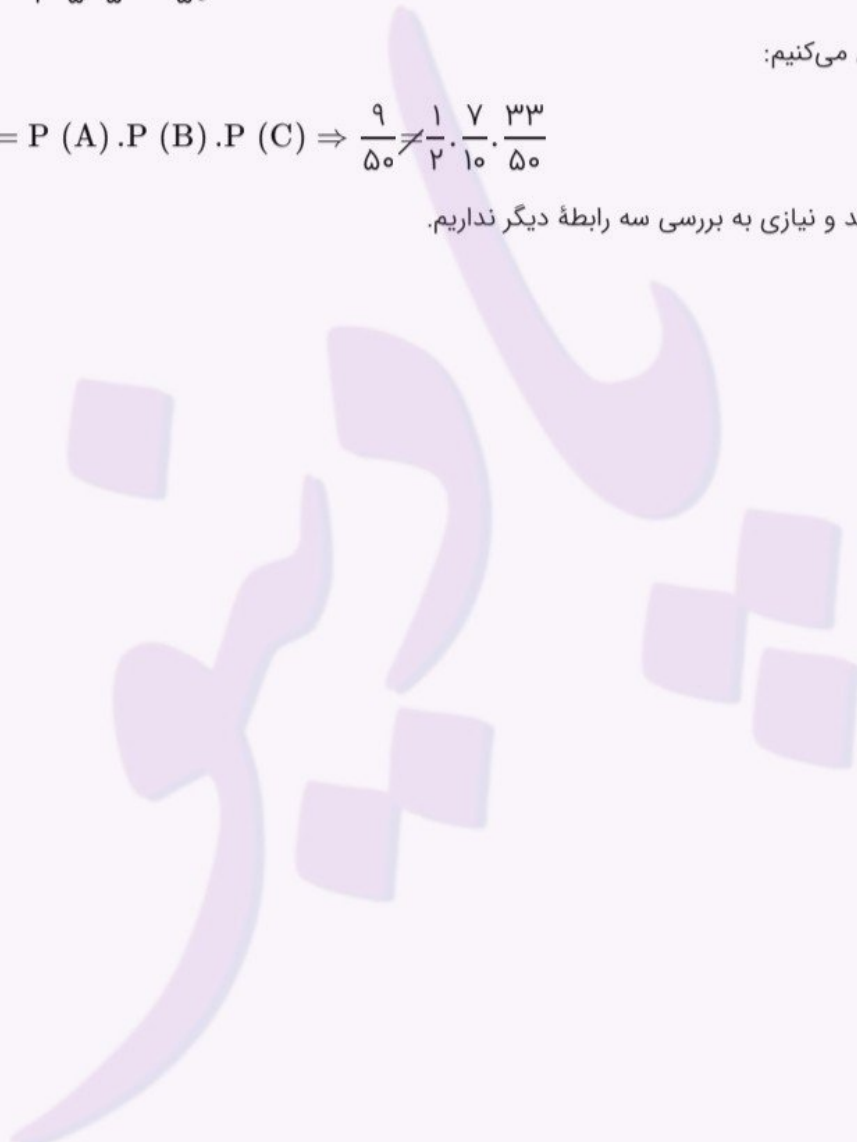
درضمن:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{50}$$

در رابطه زیر بررسی می‌کنیم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \Rightarrow \frac{9}{50} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{33}{50}$$

پس مستقل نیستند و نیازی به بررسی سه رابطه دیگر نداریم.



p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$p \vee r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	F	F	F	T	F
T	F	F	T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F	T	F
F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T	F	F

این گزاره درست نیست، چون به ازای $x = 1$ تساوی $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ برقرار نیست و مجموعه جواب گزاره‌نما برابر \mathbb{R} نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$$

این گزاره درست نیست چون اگر $n = 5$ باشد، آنگاه:

$$2^n + 1 = 2^5 + 1 = 33 = 11 \times 3$$

بنابراین $2^5 + 1$ عددی اول نیست و این به این معنی است که مجموعه جواب گزاره‌نما برابر با \mathbb{N} نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists n \in \mathbb{N} : (2^n + 1) \notin P$$

این گزاره درست نیست چون اگر $x = \frac{-1}{2}$ ، آنگاه:

$$x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

این به این معنی است که مجموعه جواب این گزاره‌نما برابر با $(-\infty, 0)$ نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists x \in (-\infty, 0) : x - \frac{1}{x} > -2$$

این گزاره درست است چون اگر $y = 3$ ، آنگاه:

$$\frac{y-3}{5} = 0$$

بنابراین مجموعه جواب این گزاره‌نما ناتهی است. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \frac{y-3}{5} \neq 0$$

حالت‌هایی که می‌تواند رخ دهد به صورت زیر است:

سه مهره سفید از B \times دو مهره سیاه از A + سه مهره سفید از B \times سه مهره سفید از A \times دو مهره سفید از ظرف A = سه مهره سفید از B \times یکی سفید و یکی سیاه از A +

$$= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \times \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \times \frac{0}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} \times \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \times 4 + 0 + 6 \times 1}{10 \times 35} = \frac{18}{10 \times 35} = \frac{9}{175}$$

$$P(\text{کیومرث}) = 3x \quad P(\text{خسرو}) = x$$

$$P(\text{خسرو یا کیومرث}) = x + 3x - 3x^2 = \frac{17}{25}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + \frac{17}{25} = 0 \Rightarrow (3x - \frac{17}{5})(x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$|S| = \text{انتخاب ۱ خودکار} \times \text{غیریکسان بودن تاس‌ها} + \text{انتخاب ۲ خودکار از بین ۱۰ تا} \times \text{یکسان ظاهرشدن ۲ تاس} \\ = ۶ \times \binom{۱۰}{۲} + ۳۰ \times \binom{۱۰}{۱} = ۶ \times ۴۵ + ۳۰ \times ۱۰ = ۲۷۰ + ۳۰۰ = ۵۷۰$$

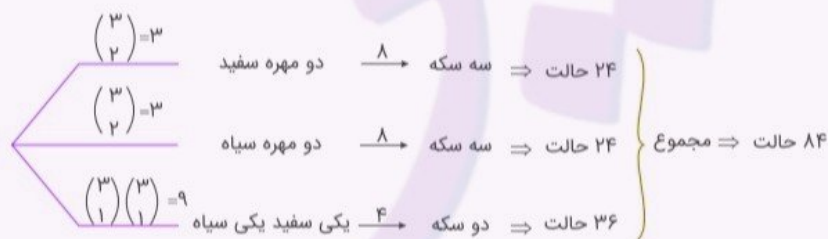
پاسخ سؤال ۱۲

$$\left. \begin{aligned} (A \cap B) &\subseteq A \\ B &\subseteq (A \cup B) \Rightarrow B \subseteq (A \cap B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow B \subseteq A$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $A \subseteq B$
بنابراین: $A = B$

$$\begin{aligned} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C') \\ &= \underbrace{[(A \cap B) \cap A']}_{\emptyset} \cup [(A \cap B) \cap C'] = (A \cap B) \cap C' = A \cap (B \cap C') \\ &= A \cap (B - C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (A \cup B) \cap B = (A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) \\ &= (A \cap C) \cup (C \cap B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = C \cap (A \cup B) \\ &= C \cap (A \cup C) = C \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (A' \cup B) \cap (A \cup C) &= [A' \cup (B \cap A)] \cap [A \cup (A' \cap C)] \\
 &= [(A' \cup (B \cap A)) \cap A] \cup [(A' \cup (B \cap A)) \cap (A' \cap C)] \\
 &= [(A' \cup B) \cap \underbrace{(A' \cup A)}_U \cap A] \cup [(A' \cup B) \cap \underbrace{(A' \cup A)}_U \cap (A' \cap C)] \\
 &= [(A' \cup B) \cap A] \cup [(A' \cup B) \cap (A' \cap C)] \\
 &= (B \cap A) \cup [(A' \cup B) \cap (A' \cap C)] \\
 &= [(B \cap A) \cup (A' \cup B)] \cap [(B \cap A) \cup (A' \cap C)] \\
 &= (B \cap A) \cup (A' \cap C) = (A \cap B) \cup (A' \cap C)
 \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned}
 (A' \cup B) \cap (A \cup C) &= (A' \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup A') \\
 &= (A' \cup B) \cap [A \cup (C \cap A')] \\
 &= [(A' \cup B) \cap A] \cup [(A' \cup B) \cap (C \cap A')] \\
 &= (A \cap B) \cup [(A' \cup B) \cap (A' \cap C)] \\
 &= (A \cap B) \cup (A' \cap C)
 \end{aligned}$$

$$m \in A \Rightarrow |m| < ۲ \Rightarrow -۲ < m < ۲ \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} A = \{-۱, ۰, ۱\}$$

$$x \in B \Rightarrow x^۳ = x \Rightarrow x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰, -۱, ۱ \Rightarrow B = \{-۱, ۰, ۱\}$$

$$y \in C \Rightarrow y^۲ \leq ۲y \Rightarrow y^۲ - ۲y \leq ۰$$

y				
y ^۲ -۲y	+	۰	-	+

$$\xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} C = \{۰, ۱, ۲\}$$

$$m \in D \Rightarrow m^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq m \leq ۱ \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} D = \{-۱, ۰, ۱\}$$

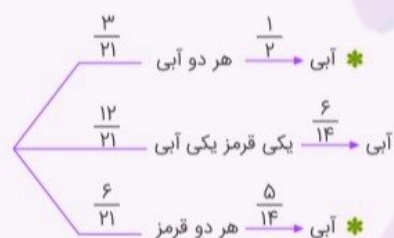
$$m \in E \Rightarrow m^۳ + ۲m = ۳m^۲ \Rightarrow m^۳ - ۳m^۲ + ۲m = ۰$$

$$\Rightarrow m(m^۲ - ۳m + ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow m(m-۲)(m-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \\ m = ۲ \\ m = ۱ \end{cases} \Rightarrow E = \{۰, ۱, ۲\}$$

بنابراین:

$$C = E, A = B = D$$



$$\frac{\frac{3}{21} \times \frac{7}{14} + \frac{6}{21} \times \frac{5}{14}}{\frac{3}{21} \times \frac{7}{14} + \frac{12}{21} \times \frac{6}{14} + \frac{6}{21} \times \frac{5}{14}} = \frac{۱۷}{۱۷ + ۲۴} = \frac{۱۷}{۴۱}$$

$$p \vee q \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv \cup \\ q \equiv \cup \end{cases}$$

$r \equiv$ دلخواه

$$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$$

$$(\supset \Rightarrow r) \Rightarrow \begin{cases} r \equiv \supset \Rightarrow (\supset \Rightarrow \supset) \equiv T \\ r \equiv \cup \Rightarrow (\cup \Rightarrow \supset) \equiv T \end{cases} \equiv T$$

$$p \vee q \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv \cup \\ q \equiv \cup \end{cases}$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$\supset \Leftrightarrow \supset \equiv T$$

$$\forall x, y; (x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (A \times C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge \sim [(x, y) \in (A \times C)]$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge \sim [(x \in A \wedge y \in C)]$$

$$\Leftrightarrow y \in B \wedge x \in A \wedge [\sim (x \in A) \vee \sim (y \in C)]$$

$$\Leftrightarrow y \in B \wedge x \in A \wedge \sim y \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B - C \Leftrightarrow (x, y) \in A \times (B - C)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{10} + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$3P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{10}$$

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$$

$$P(R) = P(A_1)P(R|A_1) + P(A_2)P(R|A_2) + P(A_3)P(R|A_3) + P(A_4)P(R|A_4)$$

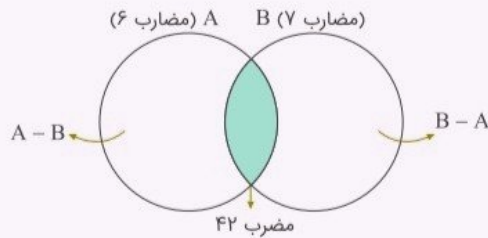
$$P(R) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{29}{60}$$

حل به روش نمودار درختی هم امکان پذیر است.

نکته: در مسائل احتمال شرطی اگر امکان نوشتن فضای نمونه بعد از اعمال شرط باشد توصیه می‌شود به جای استفاده از فرمول‌های شرطی با نوشتن فضای نمونه و انتخاب حالات مطلوب مسئله حل شود.
فضای نمونه شرطی در این حالت عبارت است از:

$$S = \{(3, 6, 6), (6, 3, 6), (6, 6, 3), (5, 5, 5), (4, 5, 6), (4, 6, 5), (5, 4, 6), (5, 6, 4), (6, 5, 4), (6, 4, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{1}{10} \text{ است، پس احتمال مورد نظر برابر است با: } P(A) = \frac{1}{10}$$



$$n(S) = 300 - 51 + 1 = 250$$

تعداد مضارب ۶ از ۵۱ تا ۳۰۰:

$$n(A) = \left[\frac{300}{6} \right] - \left[\frac{50}{6} \right] = 50 - 8 = 42 \Rightarrow n(A) = 42$$

تعداد مضارب ۷ از ۵۱ تا ۳۰۰:

$$n(B) = \left[\frac{300}{7} \right] - \left[\frac{50}{7} \right] = 42 - 7 = 35 \Rightarrow n(B) = 35$$

تعداد مضارب ۴۲ از ۵۱ تا ۳۰۰:

$$n(A \cap B) = \left[\frac{300}{42} \right] - \left[\frac{50}{42} \right] = 7 - 1 = 6 \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{42}{250} - \frac{6}{250} + \frac{35}{250} - \frac{6}{250} = \frac{65}{250}$$

$$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{16}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{12}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

افراز A با شرط مذکور یعنی افراز به دو زیرمجموعه دو عضوی و یک زیرمجموعه یک عضوی، که این تعداد برابر است با:

$$\frac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{2}}{2!}$$

و تعداد افرازهای B به سه زیرمجموعه دو عضوی برابر است با:

$$\frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2}}{3!}$$

با محاسبه ساده معلوم می‌شود که تعداد افرازهای هر دو مجموعه با شرایط گفته شده برابر با ۱۵ است.

اما راه حل دیگر به صورت زیر است:

اگر به مجموعه تک‌عضوی افراز A عدد ۶ را بیافزاییم، یک افراز مطلوب از B به دست می‌آید و برعکس. درواقع بین این افرازها تناظری یک‌به‌یک برقرار است، پس تعدادشان مساوی است.

$$|A| = |A - B| + |A \cap B| \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$2^{|A|} = 1016 + 2^{|A \cap B|} \Rightarrow 2^{|A \cap B|} \times 2^{|A - B|} = 1016 + 2^{|A \cap B|}$$

$$\xrightarrow{2^{|A \cap B|} = x} 2^7 \times x = 1016 + x \Rightarrow 128x - x = 1016$$

$$\Rightarrow 127x = 1016 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow 2^{|A \cap B|} = 8 \Rightarrow |A \cap B| = 3 \Rightarrow |A| = 7 + 3 = 10$$

$$2^{|A|} - 2 = 2^{10} - 2 = 1022$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$A = \{0, 1, 2\}, \quad B = \{+2, +3\} \Rightarrow A \cap B = \{2\}$$

$$|(A \times B) - (B \times A)| = |A| |B| - |A \cap B|^2 = 3 \times 2 - 1^2 = 5$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^5 = 32$$

$$S = \{1, 2, \dots, 399\} \Rightarrow |S| = 399$$

فرض کنیم A مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۲، B مضارب ۳ و C مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ باشد. می‌خواهیم احتمال زیر را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) - C) &= P(A \cup B) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A \cup B) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \\ &= \left[\frac{399}{2} \right] + \left[\frac{399}{3} \right] - \left[\frac{399}{6} \right] - \left[\frac{399}{6} \right] - \left[\frac{399}{10} \right] + \left[\frac{399}{30} \right] \\ &= \frac{199 + 133 - 66 - 66 - 39 + 13}{399} = \frac{174}{399} = \frac{58}{133} \end{aligned}$$

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)]$$

$(A \cap B)$ و $(A - B)$ دو پیشامد ناسازگارند پس:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} [A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] &= [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup (B \cap B')] \\ &= [\phi \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup \phi] = (A \cap B) \cup (B \cap A') \\ &= B \cap (A \cup A') = B \cap U = B \end{aligned}$$

$$(A')' = \{x | x \in U, x \notin A'\} = \{x | x \in U, x \in A\} = A$$

$$\begin{aligned} &[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \wedge p \\ &\equiv [(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \vee p)] \wedge p \\ &\equiv [\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge p \\ &\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge p \\ &\equiv [((p \wedge \sim q) \vee \sim q) \vee p] \wedge p \\ &\equiv [(\sim q \vee p) \wedge p] \equiv p \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $A = B = \{1\}$, $C = D = \{2\}$ داریم:

$$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$$

ملاحظه می‌شود که سمت چپ و سمت راست تساوی با هم برابر نیستند.

